РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З КІНЕМАТИКИ НА РУХ ТІЛ ПІД ДІЄЮ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Василь РЖЕПЕЦЬКИЙ, канд. фіз. – мат. наук, доцент, вчитель фізики КЗО «Криворізький обласний ліцей-інтернат для сільської молоді»
Микола СЛЮСАРЕНКО, канд. пед. наук, доцент кафедри фізики та методики її навчання Криворізького державного педагогічного університету.
Людмила БАЛАБАЄВА, вчитель фізики вищої категорії КЗО «Криворізький обласний ліцей-інтернат для сільської молоді»

Рух тіл під дією сили тяжіння можна віднести до рівноприскореного руху. Як правило, відстані тіл від поверхні Землі малі порівняно з радіусом Землі, тому можна вважати, що сила тяжіння надає всім тілам однакове прискорення $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$. Для спрощення розрахунків в прикладах розв'язування задач вважатимемо $g = 10\ \text{м/с}^2$.

Рівняння рівноприскореного руху у векторній формі мають вид [1]:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\ ,\quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t\,.$$

При розв'язуванні задач ці рівняння проектують на осі прямокутної системи координат (обмежимося випадком плоского руху), отримуючи рівняння руху в координатній формі:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}\ ,\ \ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}\,,$$
$$v_x = v_{0x} + a_x t\,,\quad v_y = v_{0y} + a_y t\,.$$

Після аналізу умови задачі необхідно виконати схематичний рисунок, на якому вказати траєкторію руху тіла, вектори швидкості та прискорення рухомого тіла в задані моменти часу. Далі необхідно обрати систему відліку і провести осі прямокутної системи координат. Після цього записують рівняння руху в проекціях на осі.

В загальному випадку початок системи координат зручно обирати в початковому положенні тіла, осі *Ox* та *Oy* направляти таким чином, щоб якомога більше векторів були або паралельні осям, або перпендикулярні до них. Приступаючи до розв'язання задач даного типу варто дотримуватись деяких загальних підходів [1].

Розглядаючи задачі на рух тіл, кинутих вертикально вгору в гравітаційному полі Землі, вісь *OY* спрямовуємо вертикально вгору; з урахуванням того, що $a_y = -g$, рівняння руху матимуть вигляд:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2},\ v_y = v_0 - gt\,.$$

Необхідно пам'ятати про те, що рівняння руху дозволяють визначити координату і швидкість тіла в довільний момент часу, як для сповільненого підйому вгору, так і прискореного падіння вниз.

При розв'язуванні задач на рух тіл, кинутих під кутом до горизонту, слід пам'ятати про те, що рух тіла можна розглядати як результат накладання незалежних прямолінійних рухів вздовж осей *Ox* та *Oy*, спрямованих вздовж поверхні Землі та перпендикулярно до неї відповідно. Рівняння руху в проекціях на осі, з урахуванням того, що $a_x = 0,\ a_y = -g$, матимуть вигляд:

$$x = x_0 + v_{0x}t\ ,\ \ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}\ ,$$

$$v_x = v_{0x}\ ,\quad v_y = v_{0y} - gt\ .$$

За відсутності опору повітря тіло летить по параболічній траєкторії, час руху вздовж осі *Ox* дорівнює часу руху вздовж осі *Oy*, оскільки обидва рухи відбуваються одночасно.

Склавши систему кінематичних рівнянь, розв’язують її відносно шуканих величин.

1.[4]. Стріла, випущена з лука вертикально вгору, впала на землю через 6 с. Яка початкова швидкість стріли і максимальна висота її підйому?

Розв’язування задачі починаємо з виконання рисунка, на якому вказуємо початкову швидкість стріли і прискорення вільного падіння. Вісь системи координат *Oy* направимо вертикально вгору, початок координат виберемо на поверхні землі (рис. 1.1).

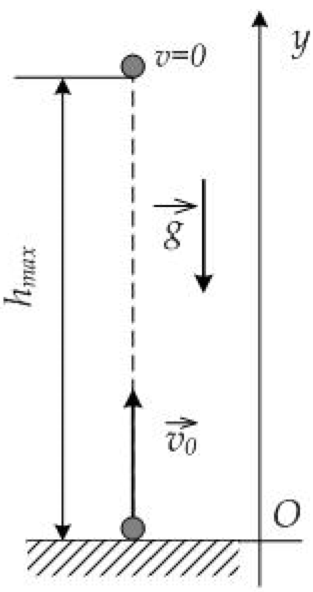

Рис. 1.1

Рівняння руху стріли:

$$v_y = v_0 - gt\ ,\qquad y = v_0t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент падіння стріли на землю координата *y*дорівнює 0:

$$0 = v_0t_{\text{пол}} - \frac{gt_{\text{пол}}^2}{2},$$

де $t_{\text{пол}} = 6$ с – час польоту.
З цього рівняння знайдемо початкову швидкість стріли:

$$v_0 = \frac{gt_{\text{пол}}}{2}\ ;\quad v_0 = \frac{10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 6\ \text{с}}{2} = 30\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Маючи на увазі подальші міркування, виразимо час польоту через початкову швидкість:

$$t_{\text{пол}} = \frac{2v_0}{g}.$$

В найвищій точці траєкторії швидкість стріли дорівнює нулю:

$$0 = v_0 - \ gt_{\text{під}}.$$

Звідси можна знайти час підйому:

$$t_{\text{під}} = \frac{v_0}{g}\ ;\quad t_{\text{під}}\ = \frac{30\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 3\ \text{с}.$$

Порівнюючи вираз для $t_{\text{під}}$ з виразом для $t_{\text{пол}}$, бачимо, що час підйому дорівнює часу падіння:

$$t_{\text{під}} = t_{\text{пад}} = \frac{t_{\text{пол}}}{2}.$$

При $t = t_{\text{під}}$ координата $y = h_{max}$:

$$h_{max} = v_0 t_{\text{під}} - \frac{g t_{\text{під}}^2}{2}; \quad h_{max} = 30\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 3\text{ с} - \frac{10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 9\text{ с}^2}{2} = 45\text{ м}.$$

2.[4]. З балкона, розташованого на висоті 25 м над поверхнею землі, кинули вертикально вгору м'ячик зі швидкістю 20 м/с. Написати формулу залежності координати від часу, вибравши за початок відліку: а) точку кидання; б) поверхню землі. Визначити, через який час м'ячик упаде на землю.

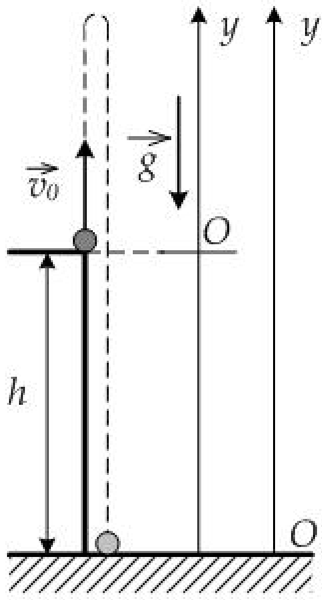

Рис. 2.1

На рисунку до задачі вказуємо початкову швидкість м'ячика і прискорення вільного падіння. Зобразимо дві осі координат; на осі *Oy* початок відліку виберемо в точці кидання, на осі *O′y′* – на поверхні землі (рис. 2.1).

Рівняння руху м'ячика відносно різних систем координат відрізнятимуться лише початковою координатою. Відносно першої системи координат $y_0 = 0$, відносно другої – $y_0 = h$.

Отже, для системи *Oy*:

$$y = v_0 t - \frac{g t^2}{2}, \quad y = 20t - 5t^2.$$

Для системи *O′y′*:

$$y = h + v_0 t - \frac{g t^2}{2}, \qquad y = 25 + 20t - 5t^2.$$

Для визначення часу польоту скористаємося першим рівнянням руху. Як видно з рисунка, в момент падіння координата м'ячика дорівнюватиме мінус h, тобто при $t = t_{\text{пол}}$, $y = -25$ м:

$$-25 = 20 t_{\text{пол}} - 5 t_{\text{пол}}^2$$

Одержане квадратне рівняння можна спростити:

$$t_{\text{пол}}^2 - 4 t_{\text{пол}} - 5 = 0.$$

За теоремою Вієта:

$$(t_{\text{пол}})_1 = 5\text{ с}, \quad (t_{\text{пол}})_2 = -1\text{ с}.$$

Другий корінь не має фізичного змісту, тому час падіння м'яча на землю дорівнює:

$$t_{\text{пол}} = 5\text{ с}.$$

3. [2]. З крутого берега річки заввишки 20 м у горизонтальному напрямку кидають камінь зі швидкістю 15 м/с. Через який час, з якою швидкістю і під яким кутом камінь упаде у воду? На якій відстані від берега?

Виконаємо рисунок, на якому покажемо траєкторію руху каменю, початкову та кінцеву швидкості, дальність польоту та прискорення вільного падіння (див. рис. 3.1).

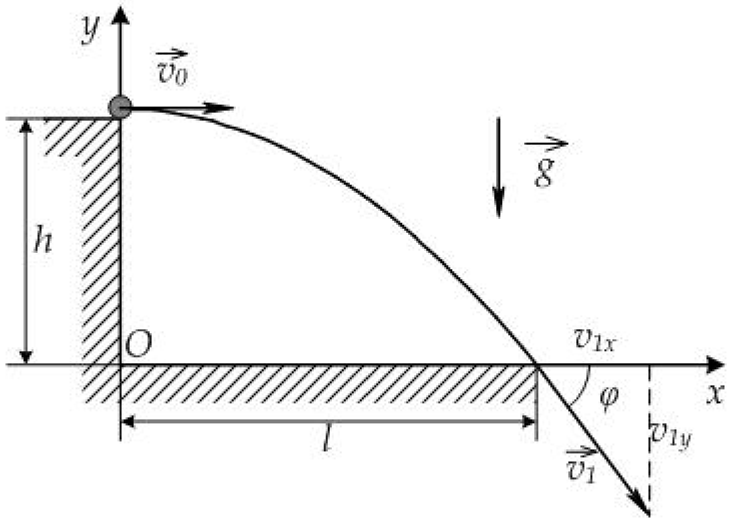

Рис. 3.1.

Виберемо осі системи координат так, як показано на рисунку. Напишемо рівняння руху каменю в проекціях на осі системи координат *Ox* і *Oy*. Врахуємо, що $x_0 = 0,\ \ y_0 = h,\ v_{0x} = v_0,\ v_{0y} = 0$.

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = h - \dfrac{gt^2}{2} \\ v_x = v_0 \\ v_y = -gt \end{cases}$$

Позначимо час падіння каменю t_1. В момент падіння каменю у воду (при $t = t_1$) координата $y_1 = 0$, а координата $x_1 = l$.

З другого рівняння системи отримаємо:

$$0 = h - \frac{gt_1^2}{2}, \qquad \text{звідки } t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}\ ; \quad t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 20\text{м}}{10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} = 2\ \text{с}.$$

З першого рівняння знайдемо дальність польоту l :

$$l = v_0 t_1\ ; \quad l = 15\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 2\ \text{с} = 30\ \text{м}.$$

Модуль швидкості $v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2}$. Складова швидкості $v_{1x} = v_0$. Складову v_{1y} обчислимо, підставивши в останнє рівняння системи час падіння каменю t_1:

$$v_{1y} = -gt_1\ ; \quad v_{1y} = -10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 2\,c = -20\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$v_1 = \sqrt{225\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} + 400\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = 25\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Як видно з рисунка:

$$tg\varphi = \frac{v_{1y}}{v_{1x}}; \quad tg\varphi = \frac{20\ \frac{\text{м}}{\text{с}}}{15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}} = 1{,}333; \ \ \varphi = 53°.$$

Вкажемо ще на один прийом розв’язування задач на рух тіла, кинутого горизонтально. У векторній формі рівняння для переміщення тіла і для його швидкості мають вид:

$$\vec{S} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}\ ; \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t.$$

На рисунку 3.2 зображені вектор переміщення $\vec{S}$, вектор $\vec{v}_0 t_1$ і вектор $\frac{\vec{g}t_1^2}{2}$. З рисунка добре видно, що модуль вектора $\vec{v}_0 t_1$ дорівнює l, а модуль вектора $\frac{\vec{g}t_1^2}{2}$ дорівнює h. Отже, виконавши рисунок, ми одразу можемо написати вирази:

$$h = \frac{gt_1^2}{2} \quad \text{і} \quad l = v_0 t_1,$$

з яких знайти час польоту і дальність польоту.

Праворуч на рис. 3.2 зображений трикутник швидкостей, який ілюструє формулу для швидкості. З нього теж можна одразу написати вирази:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + g^2 t_1^2} \ \text{ і } \ tg\varphi = \frac{gt_1}{v_0}.$$

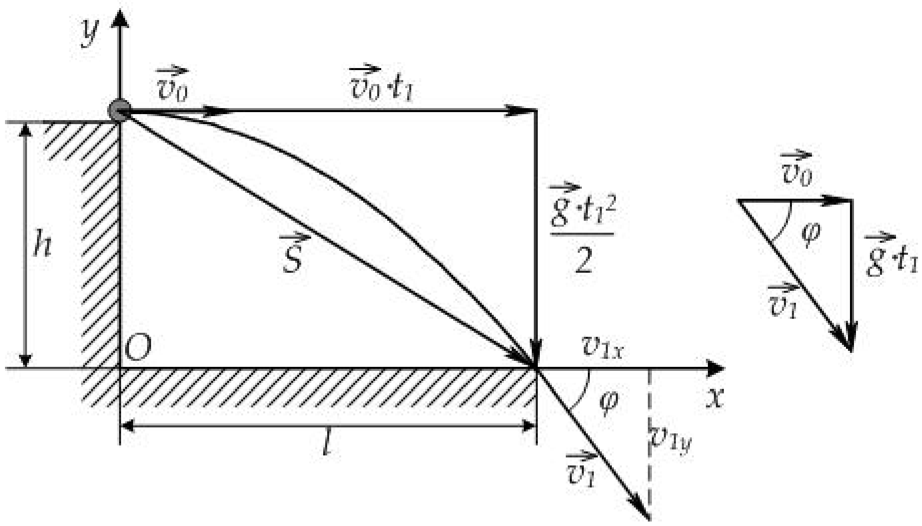

Рис. 3.2.

Цей прийом на тільки спрощує розв’язання, він також поглиблює розуміння учнями векторного характеру виразів для швидкості та переміщення.

4.[2]. М’яч кинули під кутом 30° до горизонту зі швидкістю 20 м/с. На яку максимальну висоту він підніметься? На якій відстані від точки кидання м’яч упаде?

Виконаємо рисунок, на якому покажемо траєкторію руху м’яча, початкову швидкість, швидкість у найвищій точці траєкторії, максимальну висоту підйому та дальність польоту (див. рис. 4.1). Виберемо осі системи координат так, як показано на рисунку.

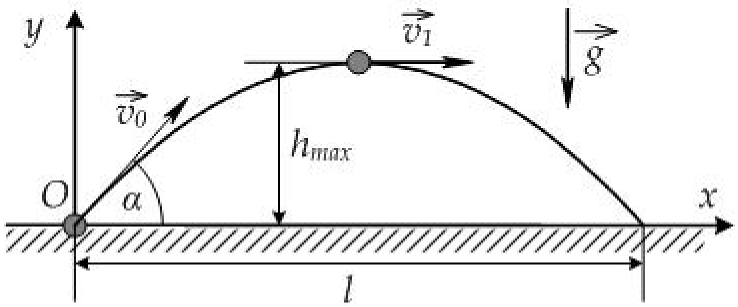

Рис. 4.1.

Напишемо рівняння руху каменю в проекціях на осі системи координат *Ox* і *Oy*. Врахуємо, що $x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ v_{0x} = v_0 cos\alpha,\ v_{0y} = v_0 sin\alpha$.

$$\begin{cases} x = v_0 cos\alpha\, t \\ y = v_0 sin\alpha\, t - \dfrac{gt^2}{2} \\ v_x = v_0 cos\alpha \\ v_y = v_0 sin\alpha - gt \end{cases}$$

Максимальна висота h дорівнює координаті y_1 в момент часу t_1, коли м'яч досягає найвищої точки траєкторії. В цей момент часу швидкість горизонтальна, тобто $v_{1y} = 0.$ З останнього рівняння системи знайдемо t_1:

$$0 = v_0 sin\alpha - gt_1; \quad t_1 = \frac{v_0 sin\alpha}{g}\ ; \quad t_1 = \frac{20\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot sin30°}{10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 1\ \text{с}.$$

$$h = v_0 sin\alpha\, t_1 - \frac{gt_1^2}{2}\ ; \quad h = 20\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot sin30° \cdot 1\ c - \frac{10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 1c^2}{2} = 5\ \text{м}.$$

Дальність польоту l дорівнює координаті x_2 в момент часу t_2, коли м'яч падає на землю. В цей момент часу $y_2 = 0$. З другого рівняння системи отримаємо:

$$0 = v_0 sin\alpha\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2}\ ; \quad t_2 = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sin\alpha}{g}\ ; \ t_2 = 2\ c.$$

Порівнюючи вираз для t_1 з виразом для t_2, бачимо, що час підйому t_1 дорівнює половині часу польоту t_2:

$$t_1 = \frac{t_2}{2}.$$

Дальність польоту l дорівнює:

$$l = v_0 cos\alpha\, t_2\ ; \quad l = 20\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot cos30° \cdot 2\ c = 34{,}64\ \text{м}\ \approx 35\ \text{м}.$$

5. [2]. З вежі, висота якої 40 м, кинули вгору тіло під кутом 30°до горизонту. Початкова швидкість тіла дорівнює 15м/с. Визначити координати найвищої точки підйому тіла над поверхнею Землі, координати точки падіння тіла на поверхню Землі та швидкість в точці падіння.

На рисунку зобразимо траєкторію руху тіла, на якій покажемо початкову точку *A*, точку максимуму траєкторії *B* і точку падіння *C*. Покажемо швидкості тіла в кожній з цих точок. Зауважимо, що в т. В швидкість направлена горизонтально. Напишемо рівняння руху тіла в координатній формі:

$$\begin{cases} x = v_0 cos\alpha t \\ y = h + v_0 sin\alpha\, t - \dfrac{gt^2}{2} \\ v_x = v_0 cos\alpha \\ v_y = v_0 sin\alpha - gt \end{cases}$$

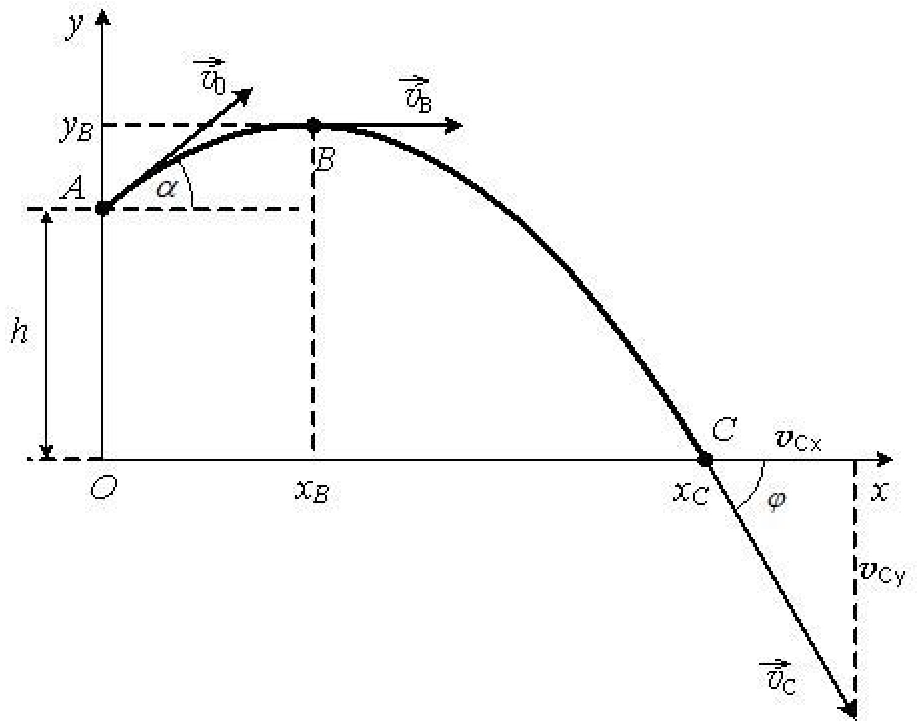

Рис. 5.1.

Для знаходження координат потрібно знайти моменти часу, в які тіло перебуває у відповідних точках траєкторії. Як вже згадувалось, для т. В $v_{By} = 0$.

$$0 = v_0 sin\alpha - gt_B; \quad t_B = \frac{v_0 sin\alpha}{g}\ ; \quad t_B = \frac{15\ \frac{м}{с}\cdot sin30°}{10\ \frac{м}{с^2}} = 0{,}75\ с.$$

В момент падіння тіла на землю (т. С) $y_C = 0$. Використавши друге рівняння системи, маємо:

$$0 = h + v_0 sin\alpha \, t_C - \frac{gt_C^2}{2} \; ; \quad 0 = 40 + 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot t_C - 5t_C^2$$

Розв’язавши квадратне рівняння, знайдемо час t_C:

$$5t_C^2 - 7{,}5t - 40 = 0; \quad t_C^2 - 1{,}5t - 8 = 0\,; \quad t_C = 3{,}676\ c.$$

Підставимо одержані значення у вирази для координат:

$$x_B = 15\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot cos30° \cdot 0{,}75\ \text{с} = 9{,}74\ \text{м}.$$

$$y_B = 40\ \text{м} + 15 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot sin30° \cdot 0{,}75\ \text{с} - \frac{10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 0{,}5625\ \text{с}^2}{2} = 42{,}8\ \text{м}.$$

$$x_C = 15\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot cos30° \cdot 3{,}676\ \text{с} = 47{,}75\ \text{м}.$$

$$y_C = 40\ \text{м} + 15 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot sin30° \cdot 3{,}676\ \text{с} - \frac{10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 13{,}513\ \text{с}^2}{2} \approx 0\ \text{м}.$$

Підстановка в останній вираз виконана лише з метою перевірки, оскільки відповідь очевидна.

Модуль швидкості в точці падіння дорівнює:

$$v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2}\,; \quad v_C = \sqrt{v_0^2 cos^2\alpha + (v_0 sin\alpha - gt_C)^2}\ ;$$

$$v_C = \sqrt{225\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \cdot 0{,}75 + \left(15\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 0{,}5 - 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 3{,}676\ \text{с}\right)^2} = 32\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Кут φ між $\vec{v}_C$ і горизонтом визначиться зі співвідношення:

$$tg\varphi = \frac{|v_{Cy}|}{|v_{Cx}|}\ ; \quad tg\varphi = \frac{|v_0 sin\alpha - gt_C|}{|v_0 cos\alpha|}\ ; \quad tg\varphi = \frac{29{,}26}{12{,}99} = 2{,}25\ ; \ \ \varphi = 66°.$$

Література

1. Балаш В. А. Задачи по физике и методы их решения : Пособие для учителя. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1983. – 432 с., ил.
2. Карпухіна О. О. Фізика. 10 клас. Академічний рівень : Збірник задач / О. О. Карпухіна, Ф. Я. Божинова, В. В. Хардіков. – 2-ге вид., перероб. І доп. – Х.: Видавництво «Ранок», 2011. – 288 с.
3. Збірник різнорівневих завдань для державної підсумкової атестації з фізики / І. М. Гельфгат, В. Я. Колебошин, М. Г. Любченко, В. Л. Манакін, І. Ю. Ненашев, Ю. О. Селезньов, О. В. Хоменко. – Харків : «Гімназія», 2002. – 104 с.
4. Римкевич А. П. Збірник задач з фізики для 9 – 11 класів середньої школи / А. П. Римкевич. – 12-те вид. – Х. : 2006. – 208 с.
5. Фізика. Комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання / Уклад. : Н. Струж, В. Мацюк, С. Остап’юк. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2016. 432 с.